

受限混合层的线性稳定性

高 军¹, 李 佳², 刘凤君³, 岳才谦¹, 时晓天¹

(1. 中国航天科技集团有限公司 中国航天空气动力技术研究院

空气动力实验与工程应用研究所, 北京 100074;

2. 唐山学院 基础教学部, 河北 唐山 063000;

3. 北京动力机械研究所 高超声速冲压发动机技术重点实验室, 北京 100074)

摘 要: 针对超声速边界层/混合层组合流动, 利用可压缩线性稳定性理论研究了流动的线性失稳特性。基本流场选取了具有不同速度特征的两股来流, 采用双曲正切的混合层剖面叠加可压缩边界层自相似性解剖面构造。重点考察了混合层中心与壁面距离、对流马赫数等参数对组合流动稳定性特征的影响, 其中壁面采用绝热壁面。混合层中心与壁面的距离为5~15倍的边界层厚度, 混合层的对流马赫数为0.6~1.2。结果表明: 该组合流动中存在独特的多重不稳定模态, 并相互影响; 且其不稳定模态随着壁面距离及对流马赫数的变化呈现出不同的主导行为。

关 键 词: 线性稳定性; 混合层; 边界层; 对流马赫数; 快模态; 慢模态

中图分类号: V231; O357.4

文献标志码: A

Linear stability of confined mixing layer

GAO Jun¹, LI Jia², LIU Fengjun³, YUE Caiqian¹, SHI Xiaotian¹

(1. Aerodynamics Experiments and Engineering Applications Institute,

China Academy of Aerospace Aerodynamics,

China Aerospace Science and Technology Corporation, Beijing 100074, China;

2. Foundation Department, Tangshan University, Tangshan Hebei 063000, China;

3. Science and Technology on Scramjet Laboratory,

Beijing Power Machinery Research Institute, Beijing 100074, China)

Abstract: Linear stability analysis was utilized to investigate the stability characteristics of a supersonic boundary/mixing layer confluent flow. The basis flow was designed as a mixing layer with hyperbolic-tangent profile over a compressible boundary layer with similar solution profile. Special attention was paid to the influence of wall distance and convective Mach number on the stability of this field, of which adiabatic wall condition was used. The distance from mixing layer center to the wall ranged from 5 to 15 times boundary layer thickness, and the convective Mach number varied from 0.6 to 1.2. It was found that novel multi-unstable modes existed in the confluent flow and the dominant modes showed different manners with varying wall distance and convective Mach number.

收稿日期: 2017-11-08

基金项目: 国家自然科学基金(51476152, 11302213); 河北省自然科学基金(A2015105073)

作者简介: 高军(1985—), 男, 工程师, 博士, 主要从事流动稳定性研究。

通讯作者: 岳才谦(1979—), 男, 高级工程师, 学士, 主要从事水动力学、计算流体力学方面研究。E-mail: higher856@163.com

引用格式: 高军, 李佳, 刘凤君, 等. 受限混合层的线性稳定性[J]. 航空动力学报, 2018, 33(9): 2248-2256. GAO Jun, LI Jia, LIU Fengjun, et al. Linear stability of confined mixing layer[J]. Journal of Aerospace Power, 2018, 33(9): 2248-2256.

Key words: linear stability; mixing layer; boundary layer; convective Mach number; fast mode; slow mode

超声速边界层/混合层组合流动在航空航天实际工程中具有广泛的应用,如多段机翼的缝翼尾部形成的混合层与主翼前缘的边界层形成的组合流动^[1],超燃冲压发动机内喷注的燃料与空气来流形成的组合流动^[2-3],导弹光学窗口上表面的冷膜气流与主流形成的组合流动等^[4-8],都兼具边界层与混合层的组合流动特征。因此,研究边界层/混合层组合流动的稳定性特征对揭示流动机理和进行流动控制具有重要的应用意义和研究价值。

线性稳定性理论的 Orr-Sommerfeld 方程对流动做了简化处理,将扰动演化满足的偏微分方程的初边值问题变为常微分方程的特征值问题。目前,线性稳定性理论是研究预测转捩最为成熟的理论方法。在自然转捩过程中,扰动的初始幅值很小,在很长的一个阶段内扰动的演化可以看成是线性的,在这个阶段内线性稳定性理论可以准确地预测扰动的演化。当扰动的幅值增长到一定程度时,扰动间的非线性作用增强,线性稳定性理论已经不能预测扰动的发展。如果按照线性稳定性理论来预测扰动发展,其最终会趋于无穷大,这显然不符合事实。Landau 首先提出了非线性的幅值增长模式。Stuart 等将 Landau 的设想具体化提出了弱非线性理论。周恒等对弱非线性理论进行了改进,获得了比较理想的结果^[9]。

边界层/混合层组合流动既与两种基本流动具有密切关系,但又存在较大的不同。长期以来,对于边界层的稳定性分析取得了丰富的成果^[10-12]。研究人员发现了边界层流动中存在 T-S (Tollmien-Schlichting) 波、Mack 模态。随着来流马赫数的增高,最不稳定波的频率由第一模态逐渐过度到第二模态。对于混合层的稳定性分析,研究人员发现流动中存在多种不稳定模态^[13-17],如快模态、慢模态、中性模态。考虑时间发展的混合层,对于二维扰动,当对流马赫数 $Ma_c < 1$ 时,最不稳定的扰动波是第一模态;当 $Ma_c \geq 1$ 时,第二模态出现,最不稳定的扰动波为第二模态波。考虑三维扰动波对稳定性的影响时,以 $Ma_c \approx 0.6$ 分界,在 $Ma_c < 0.6$ 时,最不稳定的扰动波是二维的;当 $Ma_c > 0.6$ 时最不稳定的扰动波是三维的。

对于受壁面约束的边界层/混合层的组合流动,目前的认识还十分欠缺。虽然在一部分混合

层的理论研究中,研究人员考虑了壁面对混合层的影响^[18-20],但是却忽视了边界层对混合层的影响机制。Liou 和 Liu^[21-22]研究了边界层与尾流的稳定性问题,发现边界层与尾流的距离对边界层及尾流模态的增长率具有重要影响。刘智勇等^[23]考虑了槽道流与混合层组合流动的稳定性问题,并与边界层的稳定性特征进行了比较。事实上,混合层中心与壁面的距离及对流马赫数,是边界层/混合层组合流动中的两个重要参数。壁面距离反映了边界层对混合层的影响的强弱,对流马赫数刻画了混合层的剪切程度,对边界层/混合层组合流动的稳定性具有重要影响。

本文对二维的超声速边界层/混合层组合流动的稳定性开展了理论研究。给出了组合流动中各种不稳定模态、频谱特性等特点,重点分析了混合层中心到壁面的距离和对流马赫数对组合流动稳定性的影响。

1 计算方法

1.1 控制方程

可压缩流动的控制方程

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla \cdot (\rho^* \mathbf{u}^*) = 0 \quad (1)$$

$$\rho^* \left[\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{u}^* \right] = -\nabla p^* + \nabla \cdot (2\mu^* \mathbf{S}^* + \lambda^* \nabla \cdot \mathbf{u}^* \mathbf{I}) \quad (2)$$

$$\rho^* c_v^* \left[\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) T^* \right] + p^* \nabla \cdot \mathbf{u}^* = \Phi^* + \nabla \cdot (\kappa^* \nabla T^*) \quad (3)$$

$$p^* = \rho^* R^* T^* \quad (4)$$

其中上标 * 表示有量纲的量, $\mathbf{u}^*$ 是速度矢量, t^* 是时间, ρ^* 是密度, p^* 是压力, T^* 是温度, c_v^* 是比定容热容, κ^* 是导热系数, μ^* 是第一动力黏度, $\lambda^* = -\frac{2}{3}\mu^*$ 是第二黏度, R^* 是普适气体常数, $\mathbf{S}^*$ 是应变率张量, $\mathbf{I}$ 是单位矩阵。 Φ^* 是黏性耗散系数

$$\Phi^* = 2\mu^* \mathbf{S}^* : \mathbf{S}^* + \lambda^* (\nabla \cdot \mathbf{u}^*)^2 \quad (5)$$

利用无穷远处的值(用下标 e 表示),对相关参数进行无量纲化,控制方程的无量纲化过程为

$$x = x^* / \delta, \quad y = y^* / \delta, \quad z = z^* / \delta$$

$$u = u^* / u_e^*, \quad v = v^* / u_e^*, \quad w = w^* / u_e^*$$

$$t = t^* u_e^* / \delta, \quad \mu = \mu^* / \mu_e^*, \quad \kappa = \kappa^* / \kappa_e^*$$

$\rho = \rho^* / \rho_e^*, p = p^* / (\rho_e^* u_e^{*2}), T = T^* / T_e^*$
其中特征长度 $\delta = \sqrt{v_e^* x^* / u_e^*}, u_e^*$ 为外部均匀来流(上层流体)的流向有量纲速度。

瞬时物理量可表示为平均量和扰动量之和
 $u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v}, \quad w = \bar{w}$
 $\rho = \bar{\rho} + \rho', \quad p = \bar{p} + p', \quad T = \bar{T} + T'$
 $\mu = \bar{\mu} + \mu', \quad \kappa = \bar{\kappa} + \kappa', \quad \lambda = \bar{\lambda} + \lambda'$
将任意扰动量 f' 写成行波形式
 $f' = \hat{f}(y) e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)}$ (6)

式中 α, β, ω 分别为流向波数、展向波数和圆频率。
扰动方程满足如下的常微分方程系统^[24]：

$(AD^2 + BD + C)\varphi = 0$ (7)

其中 $\varphi = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p}, \hat{T})$ 为待求的扰动特征函数, A, B, C 为 5×5 的系数矩阵, $D = d/dy$ 。边界条件为

$y \rightarrow \infty, \hat{u} = \hat{v} = \hat{w} = \hat{T} = 0$
 $y = 0, \hat{u} = \hat{v} = \hat{w} = \frac{d\hat{T}}{dy} = 0$

1.2 数值格式

采用“整体法”和“局部法”两种方法求解稳定性控制方程,两种方法的综合应用使得求解更加高效稳定。“整体法”^[25]采用五点四阶中心差分离散方程,离散后的方程形式为

$\tilde{A}\varphi = \omega \tilde{B}\varphi$ (8)

这是一个广义特征值问题,采用 QZ 方法进行求解。

“局部法”采用 Malik 等^[26]提出的二点四阶精度的有限差分方法求解。离散后的方程形式为

$\tilde{D}(\omega)\varphi = 0$ (9)

“局部法”中特征值(即圆频率 ω)的初值由“整体法”提供,可加速收敛过程。

1.3 基本流模型

本文从实际流动的特征出发,摒弃实际流动中复杂的几何因素,采用混合层剖面叠加边界层剖面的方式给出基本流动模型,如图 1 所示。

混合层的无量纲平均流速模型为双曲正切形式

$\bar{u} = \frac{1 + u_2}{2} + \frac{1 - u_2}{2} \tanh[\sigma(y - h)]$ (10)

其中 h 为混合层的中心到壁面的距离, $\sigma = 2.0$ 。温度由 Buesmann-Crocco 公式给出

$$\bar{T} = \frac{T_2(1 - \bar{u}) + (\bar{u} - u_2)}{1 - u_2} + \frac{1}{2} \sqrt{Pr} (\gamma - 1) Ma_1^2 (1 - \bar{u})(\bar{u} - u_2)$$
 (11)

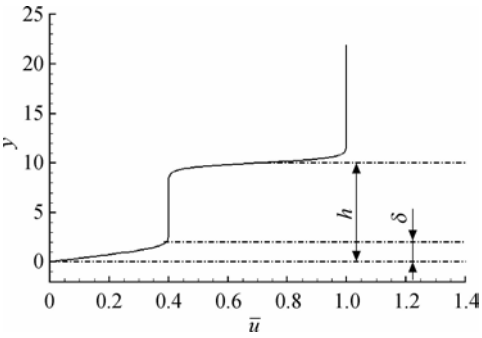


图 1 边界层/混合层组合流动示意图
Fig. 1 Schematic figure of boundary/mixing layers confluent flow

其中 Pr 为普朗特数, γ 为比热比, 下标 1 表示上层流体, 下标 2 表示下层流体, Ma_1 为上层流体的马赫数。表征两层流体混合特征最有效的参数为对流马赫数 Ma_c

$Ma_c = \frac{u_1 - u_2}{a_1 + a_2}$ (12)

其中 a 为声速, 下层流体马赫数 $Ma_2 = Ma_1 - 2Ma_c$ 。

边界层的速度和温度剖面由可压缩边界层方程的相似性解给出。图 2 给出了上层流体马赫数 $Ma_1 = 4.0$, 对流马赫数 $Ma_c = 0.6, 0.8, 1.0, 1.2$ 时边界层/混合层的速度和温度剖面。

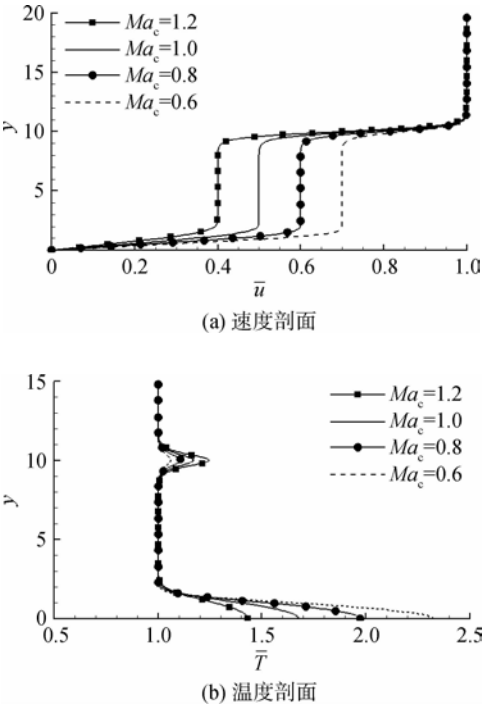


图 2 $Ma_1 = 4.0, h = 10$ 的组合流动速度及温度剖面
Fig. 2 Velocity and temperature of boundary/mixing layers confluent flow with $Ma_1 = 4.0, h = 10$

2 计算结果及分析

计算状态为:固定上层流体(快速流)的来流马赫数 $Ma_1=4.0$,下层流体(慢速流)的来流马赫数范围为 $Ma_2=1.6\sim 2.8$,对应的对流马赫数范围为 $Ma_c=1.2\sim 0.6$ 。混合层中心离壁面的范围为 $h=5\sim 15$,雷诺数固定为 $Re=10^4$ 。

2.1 特征值及特征函数

计算过程中,首先采用“整体法”获得组合流动的整体不稳定特征,并给“局部法”提供初始条件,用于加速“局部法”的收敛过程。以 $Ma_c=1.2, h=10, \alpha=0.6, \beta=0$ 为例说明稳定性分析的整体情况。图 3 给出的是该条件下得到的全局特征值,图中 ω_r 为 ω 的实部; ω_i 为 ω 的虚部,即增长率,同时给出了法向网格 $N=370$ 和 $N=500$ 下的计算结果,可见网格加密后,得到的全局特征值变化不大。从图 3 可以看出在当前的组合流动中主要存在三个离散的不稳定波,在图中标记为 1、2、3。

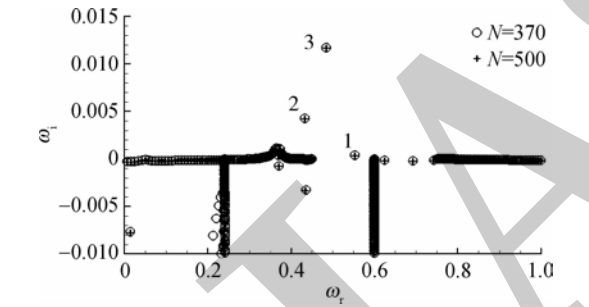


图 3 $Ma_1=4.0, Ma_c=1.2, h=10, \alpha=0.6, \beta=0$ 条件下的全局特征值分布

Fig. 3 Global eigenvalue with $Ma_1=4.0, Ma_c=1.2, h=10, \alpha=0.6, \beta=0$

以图 3 所给出的三个离散特征值为初值,使用“局部法”计算出来三支曲线如图 4 所示。三支曲线分别对应于不同的波数段。

采用整体法(global method)和局部法(shooting method)相结合得到了全波数段的不稳定波,如图 5 所示。可以看出,边界层/混合层流动中存在多重不稳定模态。为了区分混合层中的多重不稳定模态,计算了多重模态的相速度,结果如图 6(a)所示,图中 C_r 为相速度的实部。一类相速度 C_r 较小,在 $0.40\sim 0.62$ 之间为慢模态 Mode S,一类相速度在 $0.62\sim 1.0$ 之间为快模态 Mode F。按照波数段从低到高排列将快模态 Mode F 分为 Mode F1、Mode F2、Mode F3 及更高阶的快模态。其中,慢模态的增长率低于快模

态的,如图 6(b)所示。Mode F1 和 Mode F2 的最不稳定波的增长率相当,其他快模态的最不稳定增长率随着模态阶数增高而减小。

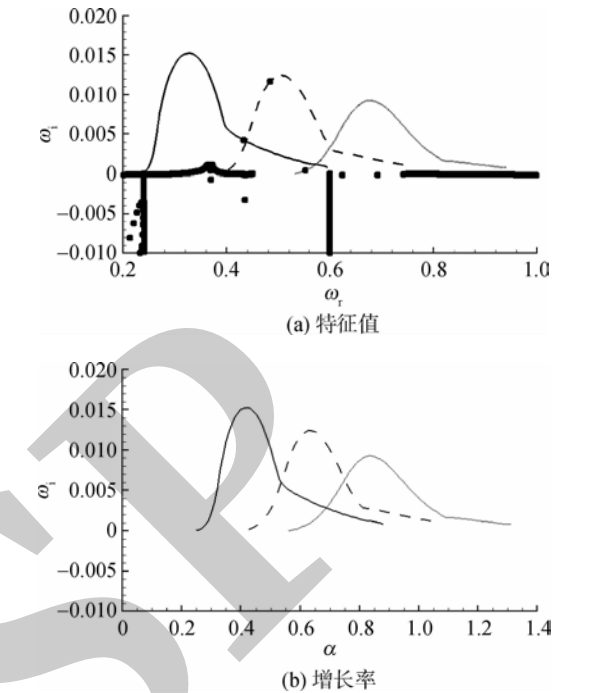


图 4 扰动波的特征值和增长率随 α 的变化

Fig. 4 Variation of eigenvalues and amplification of perturbation waves with α

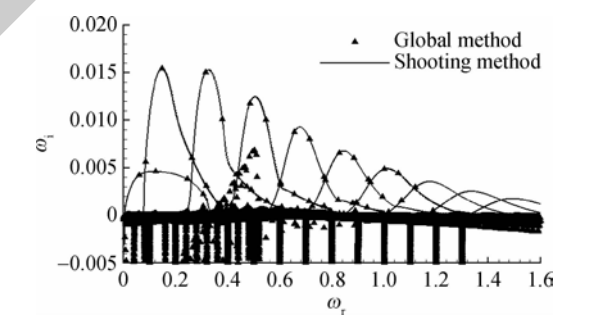
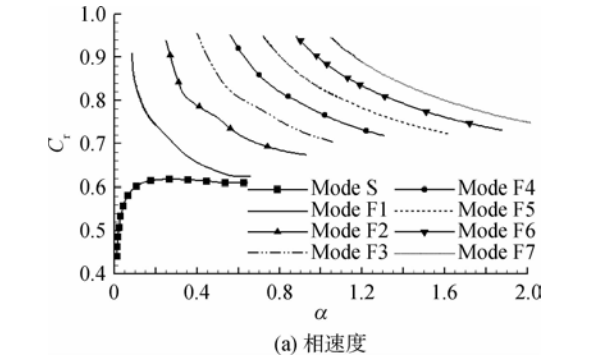


图 5 $Ma_1=4.0, Ma_c=1.2, h=10$ 条件下的不稳定波

Fig. 5 Perturbation waves with $Ma_1=4.0, Ma_c=1.2, h=10$



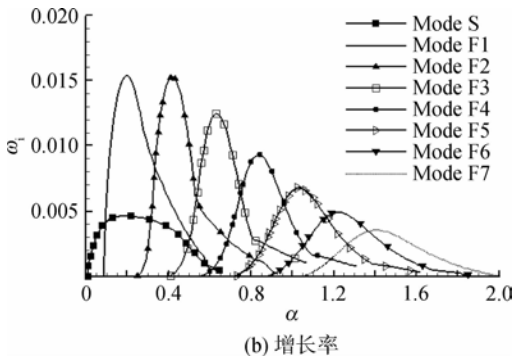


图 6 $Ma_1=4.0, Ma_c=1.2, h=10$ 条件下的快、慢模态

Fig. 6 Fast and slow modes with

$Ma_1=4.0, Ma_c=1.2, h=10$

图 7 给出了 Mode S 和 Mode F 的压力特征函数的实部 $\hat{p}_r$ 。Mode S 在快速流一侧由混合层中心向外部快速流动辐射,随着辐射距离的增加能量逐渐衰减,在 $15h$ 处接近于 0。由于边界层的存在使得 Mode F 向慢速流一侧的辐射特性被抑制。

图 8 给出了不同波数段快模态的速度特征函数。不同波数段的最不稳定快模态在边界层/混合层连接处的峰值个数不同: Mode F1、Mode F2、Mode F3 和 Mode F4 依次在边界层内存在 1、2、3、4 个极大峰值。

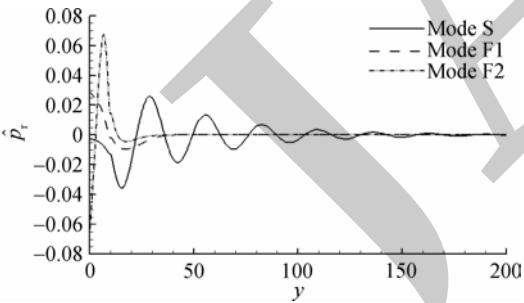
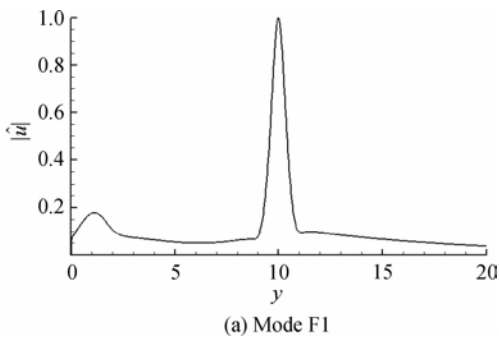


图 7 $Ma_1=4.0, Ma_c=1.2, h=10$ 条件下

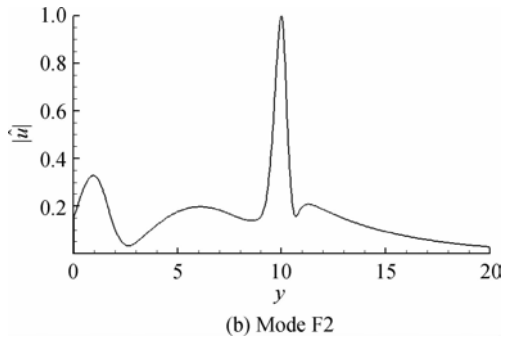
快、慢模态的压力特征函数

Fig. 7 Pressure eigen-functions of fast and slow

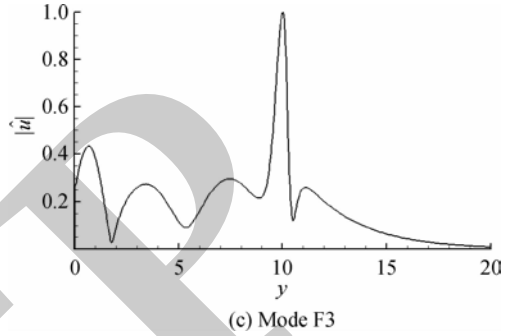
modes with $Ma_1=4.0, Ma_c=1.2, h=10$



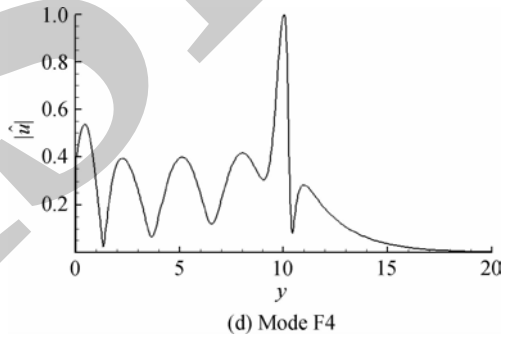
(a) Mode F1



(b) Mode F2



(c) Mode F3



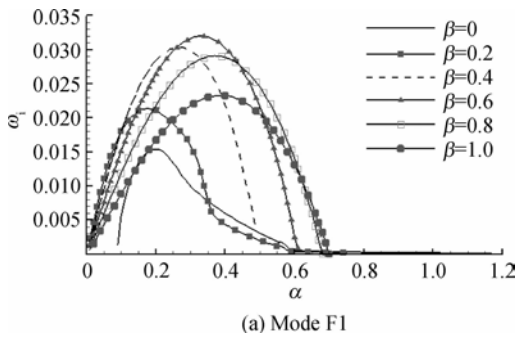
(d) Mode F4

图 8 不同波数段最不稳定快模态的速度特征函数

Fig. 8 Velocity eigen-functions of the most unstable

fast modes in different wave-number ranges

图 9 给出了展向波数 β 对快模态增长率的影响。由图可见, Mode F1 为比较明显的三维不稳定波占主导, Mode F2、Mode F3 和 Mode F4 在低波数下以二维不稳定波占主导, 在高波数下以三维波占主导。



(a) Mode F1

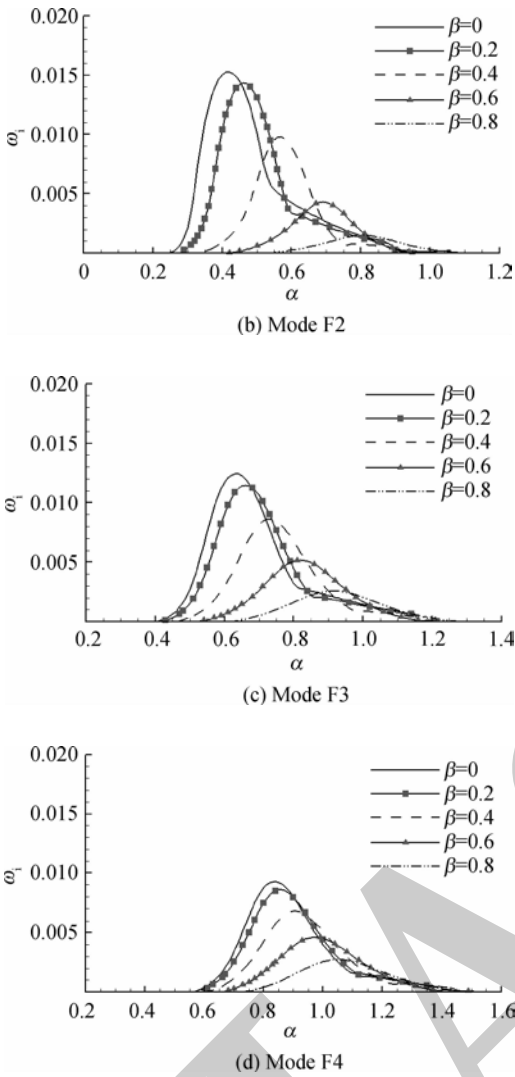


图 9 展向波数 β 对快模态增长率的影响
Fig. 9 Influence of span-wise wave number β on the amplification of fast modes

2.2 壁面距离对稳定性的影响

针对对流马赫数 $Ma_c = 1.2$ 的条件,基于线性稳定性分析,考察了壁面距离 h 对稳定性的影响,分析结果如图 10 所示。

由图 10 可以看出:随着壁面距离 h 的增加 Mode S 增长率有所增加;Mode F 的增长率整体减小。随着壁面距离 h 的增加 Mode S 的不稳定波数范围增加;Mode F 各模态不稳定波数范围减小,整体向左移动。Mode S 的相速度变化范围基本处于 $0.4 \sim 0.6$ 之间,Mode F 的相速度变化范围大致处于为 $0.6 \sim 1.0$,两者随壁面距离的增大没有明显的变化。

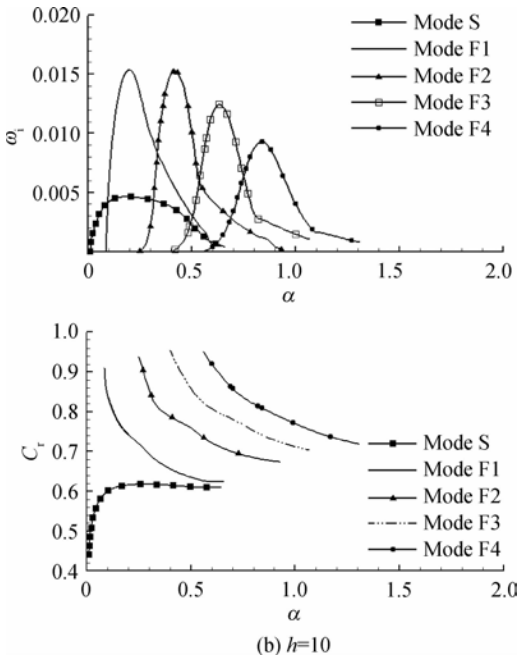
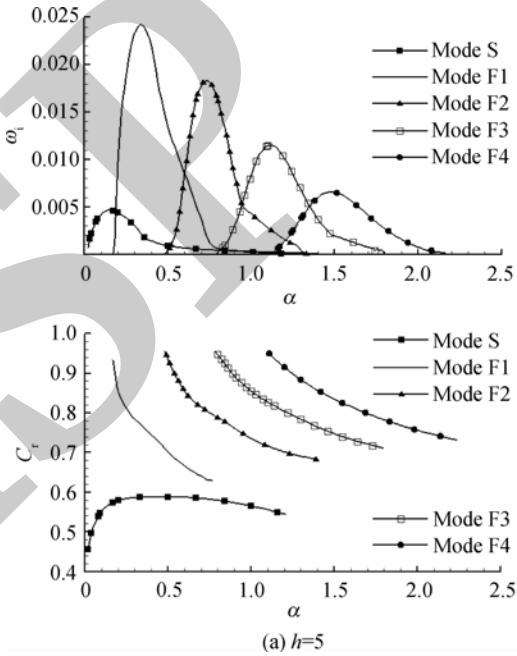
2.3 对流马赫数的影响

针对不同的壁面距离,利用线性稳定性分析工具,考察了对流马赫数 $Ma_c = 1.0, 0.8, 0.6$ 条

件下组合流动的稳定性特征,分析结果如图 11~图 14 所示。

图 11 给出的是 $Ma_c = 1.0$ 条件下,壁面距离分别为 $h = 5 \sim 15$ 时,组合流动的稳定性特征。由图可见: $Ma_c = 1.0$ 情况与 $Ma_c = 1.2$ 的情况类似,只不过不稳定波的相速度范围略有改变,处于 $0.5 \sim 1.0$ 之间;其中 Mode F 仍然占据主导地位。

图 12 给出的是 $Ma_c = 0.8$ 条件下,壁面距离分别为 $h = 5, 10, 15$ 时,组合流动的稳定性特征。图 13 给出的是壁面距离对慢模态增长率的影响。由图可见:与对流马赫数 $Ma_c \geq 1$ 时不同,此时



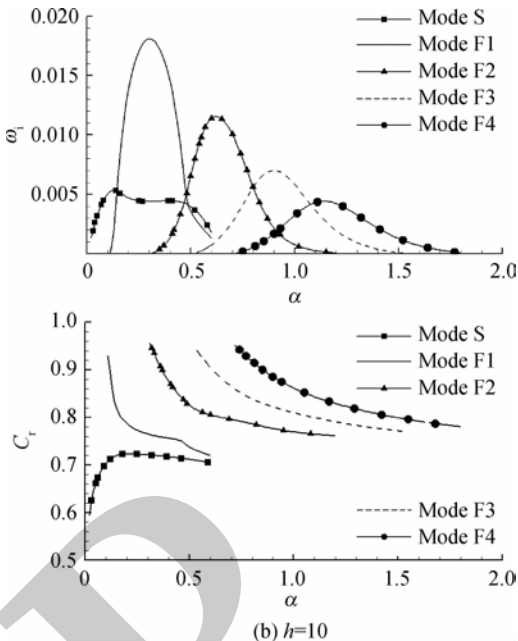
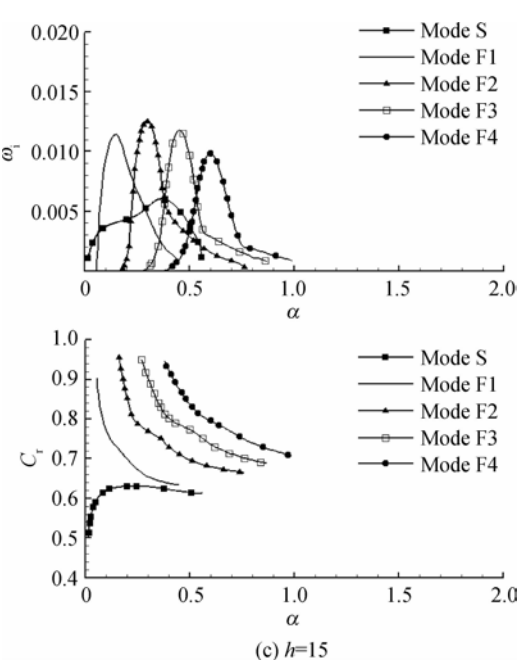


图 10 壁面距离对增长率和相速度的影响($Ma_c=1.2$)
Fig. 10 Influence of wall distance on the amplification and phase velocity ($Ma_c=1.2$)

Mode S 占据主导地位;Mode F 的增长率很小;当 $h=10,15$ 时,Mode S 的增长率非常接近,几乎不随壁面距离变化。

当对流马赫数 $Ma_c=0.6$ 时,只有 Mode S 存在。图 14 给出的是壁面距离对 Mode S 的影响。当 $h=5,10,15$ 时,Mode S 的增长率非常接近,几乎不随壁面距离变化。

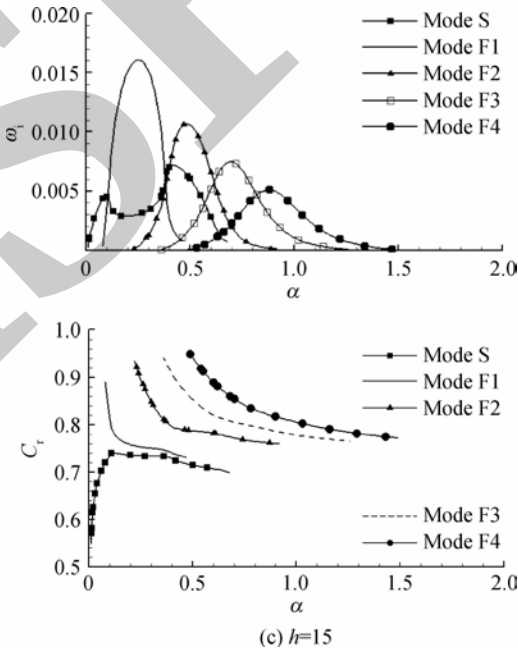
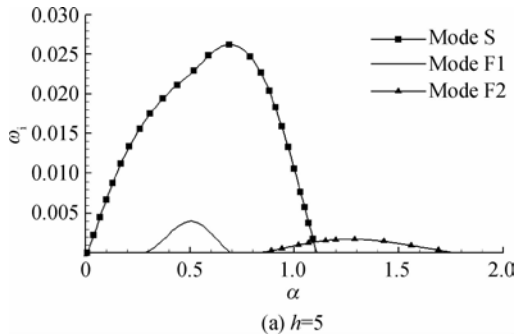
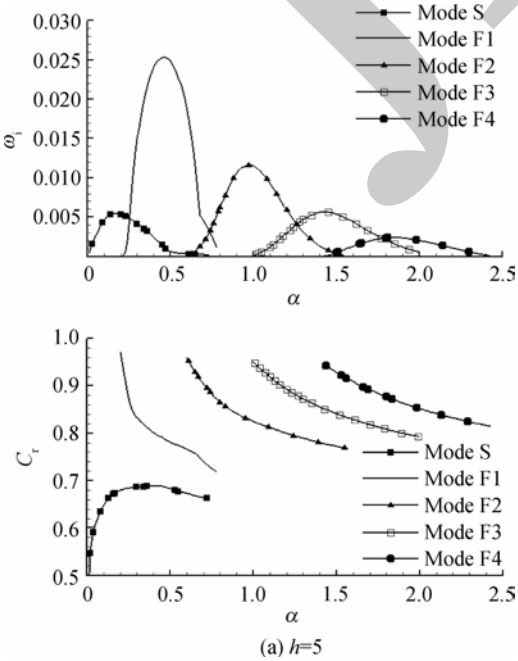


图 11 壁面距离对增长率和相速度的影响($Ma_c=1.0$)
Fig. 11 Influence of wall distance on the amplification and phase velocity ($Ma_c=1.0$)



(a) $h=5$

(a) $h=5$

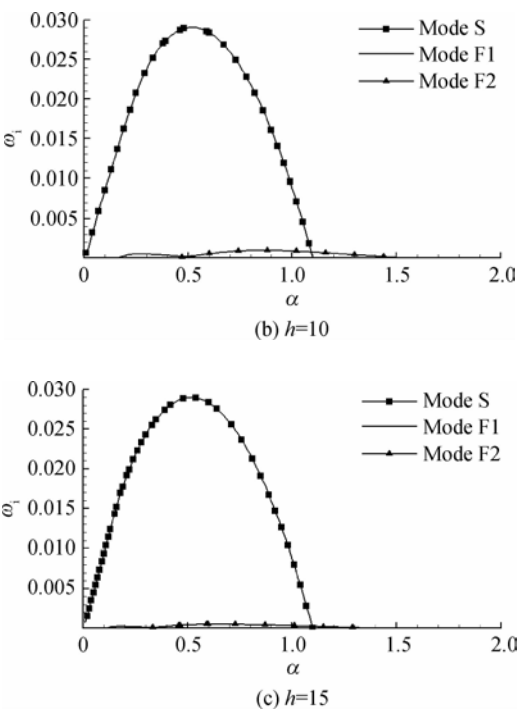


图 12 壁面距离对增长率的影响 ($Ma_c=0.8$)
Fig. 12 Influence of wall distance on the amplification ($Ma_c=0.8$)

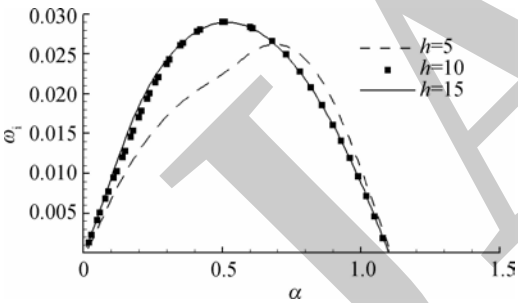


图 13 壁面距离对慢模态增长率的影响 ($Ma_c=0.8$)
Fig. 13 Influence of wall distance on the amplification of slow mode ($Ma_c=0.8$)

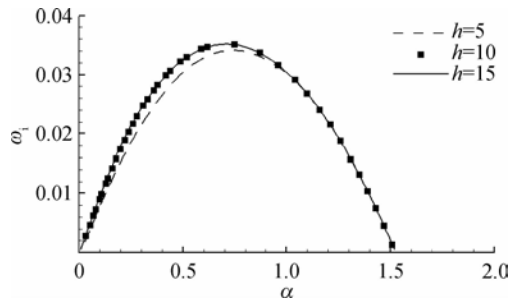


图 14 壁面距离对慢模态增长率的影响 ($Ma_c=0.6$)
Fig. 14 Influence of wall distance on the amplification of slow mode ($Ma_c=0.6$)

3 结 论

本文针对超声速边界层/混合层的基本流动模型,基于线性稳定性分析,采用“整体法”和“局部法”考察了组合流动在超声速条件下的稳定性特征,着重考虑了壁面距离及对流马赫数对组合流动稳定性的影响。对流马赫数比较高时存在多重的不稳定模态,根据相速度的大小可以将模态分为快模态 (Mode F) 和慢模态 (Mode S)。 $Ma_c \geq 1$ 时, Mode F 占主导地位,存在较为明显的三维不稳定主导模态。 $Ma_c < 1$ 时 Mode S 逐渐占主导地位。在 $Ma_c = 0.6$ 时, Mode F 基本消失,组合流动中只存在 Mode S。 $Ma_c \geq 1$ 时随着混合层中心离壁面距离的增加, Mode F 各模态增长率减小; Mode S 增长率有所增加。快、慢模态相速度的变化范围差别不大。 $Ma_c < 1$ 时, Mode S 的增长率随壁面距离变化增大较小,增长率和相速度变化范围趋于稳定。

参考文献:

[1] 杨茵,陈迎春,李栋. 多段翼混合边界层改变对流场的影响研究[J]. 航空工程进展, 2016, 7(1): 30-37.
YANG Yin, CHEN Yingchun, LI Dong. Influence of confluent boundary layer changing for multi-element airfoils flow field[J]. Advances in Aeronautical Science and Engineering, 2016, 7(1): 30-37. (in Chinese)

[2] 王旭东,高峰,王应洋,等. 超燃燃烧室支板喷注器燃料掺混优化数值分析[J]. 弹箭与制导学报, 2016, 36(1): 93-98.
WANG Xudong, GAO Feng, WANG Yingyang, et al. Numerical optimization analysis of fuel-air mixing for a supersonic combustor with strut injector[J]. Journal of Projectiles, Rockets, Missiles and Guidance, 2016, 36(1): 93-98. (in Chinese)

[3] YOU Yancheng, LUEDEKE H, HANNEMANN K. Injection and mixing in a scramjet combustor: DES and RANS studies[J]. Proceeding of the Combustion Institute, 2013, 34(2): 2083-2092.

[4] FU Jia, YI Shihe, WANG Xiaohu, et al. Experimental study on supersonic film cooling on the surface of a blunt body in hypersonic flow[J]. Chinese Physics: B, 2014, 23(10): 319-326.

[5] SHI Xiaotian, LIU Fengjun, HU Ning, et al. Supersonic film cooling simulation with a discontinuous galerkin method[R]. AIAA-2017-2248, 2017.

[6] 朱杨柱,易仕和,田立丰,等. 带喷流的超声速光学头罩流动显示[J]. 北京航空航天大学学报, 2013, 39(1): 105-108.
ZHU Yangzhu, YI Shihe, TIAN Lifeng, et al. Flow visualization of supersonic optical dome with jet[J]. Journal of

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2013, 39(1):105-108. (in Chinese)

[7] MICHAEL A K, MARKUS J K, HERBERT O. Influence of cooling-gas properties on film-cooling effectiveness in supersonic flow[J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 2015, 52(5):1443-1455.

[8] FEDOROV A V, SOUDAKOV V G, LEYVA I A. Stability analysis of high-speed boundary layer flow with gas injection[R]. AIAA-2014-2498, 2014.

[9] 周恒, 赵耕夫. 流动稳定性[M]. 北京: 国防工业出版社, 2004.

[10] LEES L, LIN C C. Investigation of the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid[R]. NACA TN 1115, 1946.

[11] MACK L M. Boundary layer linear stability theory[R]. AGARD Report No. 709, 1984.

[12] FEDOROV A V, TUMIN A. Branching of discrete modes in high-speed boundary layers and terminology issues[R]. AIAA-2010-5003, 2010.

[13] MICHALKE A. On the inviscid instability of the hyperbolic-tangent velocity profile[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1964, 19(4):543-556.

[14] RAGAB S A, WU J L. Linear instabilities in two-dimensional compressible mixing layers[J]. Physics of Fluids, 1989, 1(6):957-966.

[15] JACKSON T, GROSCH C. Inviscid spatial stability of a compressible mixing layer[R]. NASA CR 181855, 1989.

[16] DAY M J, REYNOLDS W C, MANSOUR N M. The structure of the compressible reacting mixing layer; insights from linear stability analysis[J]. Physics of Fluids, 1998, 10(4):993-1007.

[17] 沈清, 王强, 庄逢甘. 超声速平面剪切层声辐射涡模态数值分析[J]. 力学学报, 2007, 39(1):7-14.

SHEN Qing, WANG Qiang, ZHUANG Fenggan. Numerical analysis of acoustic radiation vortical modes in a spatially evolving supersonic plane shear layer[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2007, 39(1):7-14. (in Chinese)

[18] GREENOUGH J A, RILEY J J. The effects of walls on a compressible mixing layer[R]. AIAA 89-0372, 1989.

[19] HU F Q. A Numerical study of wave propagation in a confined mixing layer by eigenfunction expansions[J]. Physics of Fluids, 1993, 5(6):1420-1426.

[20] HUDSON D A, LONG L N, MORRIS P J. Computation of a confined compressible mixing layer[R]. AIAA 95-2173, 1995.

[21] LIOU W W, LIU F J. Spatial linear instability of confluent wake/boundary layers[J]. AIAA Journal, 2001, 39(11):2076-2081.

[22] LIOU W W, LIU F J. Compressible linear stability of confluent wake/boundary layers[J]. AIAA Journal, 2003, 41(12):2349-2356.

[23] 刘智勇, 袁湘江, 刘小勇, 等. 超声速边界层/混合层组合流动的稳定性分析[J]. 力学学报 2014, 46(1):28-36.

LIU Zhiyong, YUAN Xiangjiang, LIU Xiaoyong, et al. Stability analysis of supersonic boundary/mixing layers confluent flow[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2014, 46(1):28-36. (in Chinese)

[24] GAO Jun, LUO Jisheng. Mode decomposition of nonlinear eigenvalue problems and application in flow stability[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2014, 35(6):667-674.

[25] MALIK M R. Numerical methods for hypersonic boundary layer stability[J]. Journal of Computational Physics, 1990, 86:376-413.

[26] MALIK M R, CHUANG S, HUSSAINI M Y. Accurate numerical solution of compressible linear stability equation [J]. Zeitschrift Für Angewandte Mathematik und Physik Zamp, 1982, 33(2):189-201.

(编辑:陈 越)